13 Nisan 2017

1	2	3	4	5	Toplam

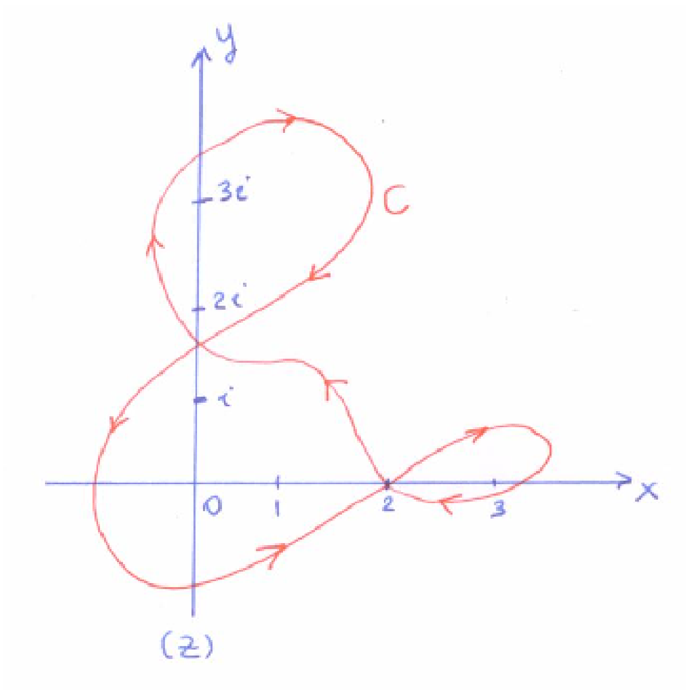
Adı Soyadı:

Öğrenci No:

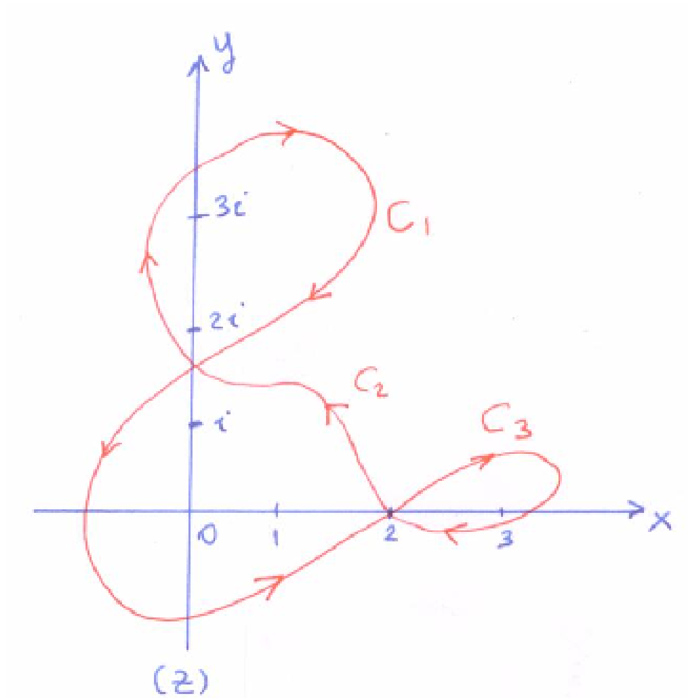
İmza:

MAT 537 FONKSİYONLAR TEORİSİ I
DÖNEM SONU SINAVI

1) Şekildeki C çevresi üzerinden $\oint\limits_C \dfrac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz$ integralini hesaplayınız. (**20 puan**)



ÇÖZÜM. C eğirisi aşağıdaki şekilde olduğu gibi $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ olacak şekilde üç eğrinin birleşimi olarak yazabiliriz.



Bu durumda C_1 ve C_3 eğrileri negatif yönlü iken C_2 eğrisi pozitif yönlü olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz &= \oint_{C_1} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz + \oint_{C_3} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz \\
&= -\oint_{-C_1} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz + \oint_{C_2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz - \oint_{-C_3} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz \\
&= -I_1 + I_2 - I_3
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada dikkat edelim ki $-C_1$, C_2 ve $-C_3$ eğirileri pozitif yönde yönlendirilmiştir. Önce $I_1 = \oint_{-C_1} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz$ integraleni hesaplayalım. Burada integrantın C_1 çevresi içerisine düşen singüler noktası sadece $z_1 = 3i$ dir. $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z^2}$ seçersek, f fonksiyonu C_1 in içinde ve üzerinde analitiktir. Buna göre Cauchy İntegral Formülünü uygularsak;

$$I_1 = \oint_{-C_1} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{e^{3\pi i}}{(3i)^2} = \frac{2\pi i}{9}$$

bulunur. I_2 integrali için C_2 eğrisi içerisine düşen singüler nokta $z_2 = 0$ dır. $g(z) = \frac{e^{\pi z}}{z-3i}$ seçilirse, g fonksiyonu C_2 nin içinde ve üzerinde analitik olur. Ayrıca

$$g'(z) = \frac{\pi e^{\pi z}(z-3i) - e^{\pi z}}{(z-3i)^2} \Rightarrow g'(0) = \frac{1+3\pi i}{9}$$

olur. Buna göre $n = 1$ için Cauchy Türev Formülü uygulanırsa

$$I_2 = \oint\limits_{C_2} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz = 2\pi i \frac{g'(0)}{1!} = -\frac{2\pi^2}{3} + \frac{2\pi i}{9}$$

olur. Son olarak I_3 integralinde $h(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}$ integrantı, C_3 ün içinde ve üzerinde analitik olduğundan Cauchy-Goursat Teoremi uyarınca

$$I_3 = \oint\limits_{-C_3} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz = 0$$

dır. Bu değerleri bir araya getirirsek

$$\begin{aligned} \oint\limits_{C} \frac{e^{\pi z}}{z^2(z-3i)}dz &= -I_1 + I_2 - I_3 = -\frac{2\pi i}{9} - \frac{2\pi^2}{3} + \frac{2\pi i}{9} \\ &= -\frac{2\pi^2}{3} \end{aligned}$$

elde edilir.

2) (a) Kompleks integrasyon için ML-eşitsizliğini ifade ediniz. **(10 puan)**

(b) $C : |z| = 1$ çemberi olmak üzere $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{5z^8 + 2iz}dz$ integralinin modülü için bir üst sınır bulunuz. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) ML-Eşitsizliği: f düzgün bir C eğirisi üzerinde sürekli olsun ve eğri üzerindeki her z noktası için $|f(z)| \leq M$ gerçeklensin. C eğirisinin uzunluğu L olmak üzere

$$\left| \int\limits_C f(z)dz \right| \leq ML$$

eşitsilziği gerçeklenir.

(b) Verilen C çevresinin uzunluğu $L = 2\pi$ dir. Ayrıca her $z \in C$ için (yani $|z| = 1$ olmak üzere)

$$|f(z)| = \frac{|e^z|}{|5z^8 + 2iz|} \leq \frac{|e^z|}{5|z|^8 - 2|z|} = \frac{|e^z|}{3} = \frac{e^x}{3} \leq \frac{e}{3} =: M$$

(çünkü birim çember üzrinde x in alacağı en üyük değer 1 dir). ML-eşitsizliği uyarınca

$$\left| \oint\limits_C \frac{e^z}{5z^8 + 2iz}dz \right| \leq \frac{2\pi e}{3}$$

bulunur.

3) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ ve } 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$ kümesinin aşağıdaki dönüşümler altındaki görüntülerini bulunuz ve bunları karşılık gelen düzlemlerde gösteriniz.

(a) $\omega = z^2$ dönüşümü **(10 puan)**

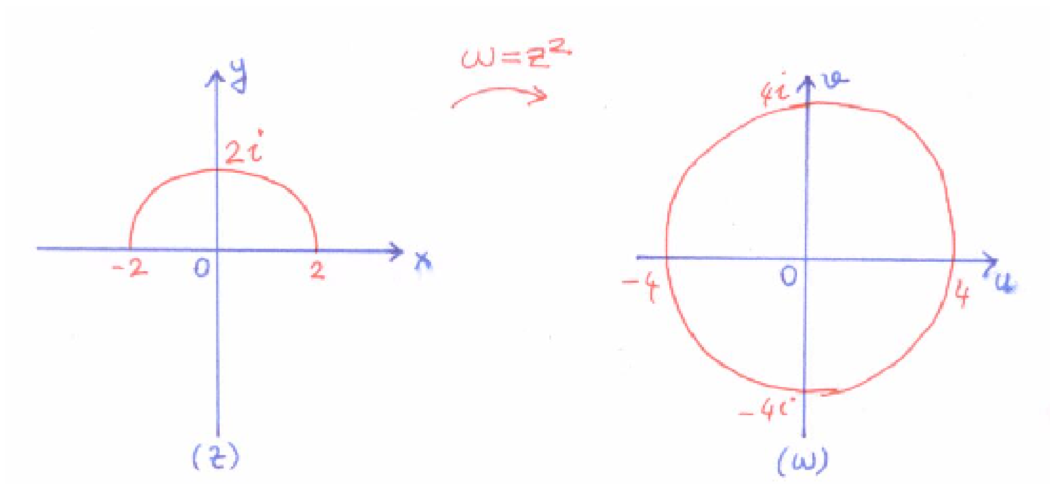
(b) $\omega = \dfrac{1}{z}$ dönüşümü **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

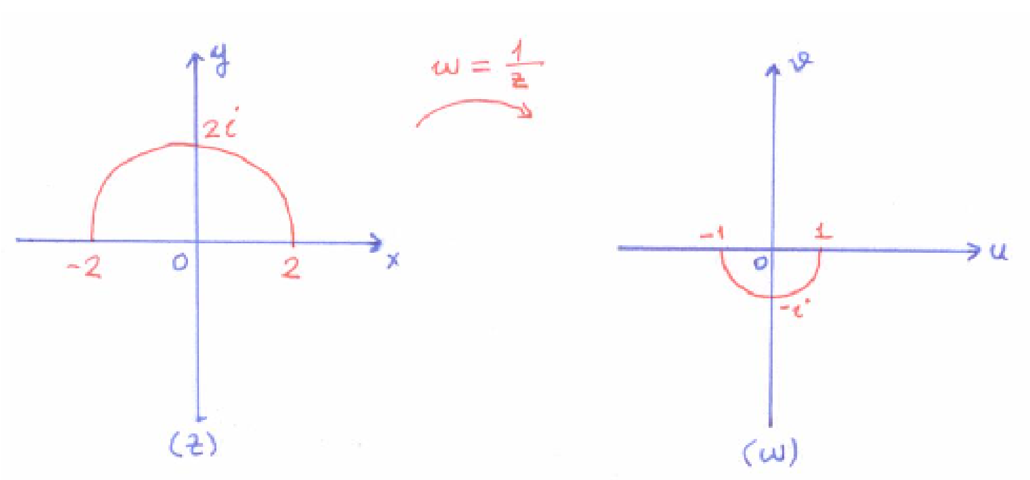
(a) $z \in S$ olduğunda $z = re^{i\theta} = 2e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ yazabiliriz. $\omega = z^2$ dönüşümü verildiğine göre

$$\omega = r^2 e^{i2\theta} = 4e^{i2\theta}, \quad 0 \leq 2\theta \leq 2\pi$$

elde edilir. O halde S nin görüntüsü $|\omega| = 4$ çemberinin tamamı olur.



(b) $\omega = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{2}e^{-i\theta}$, $-\pi \leq -\theta \leq 0$ olduğundan dolayı S nin görüntüsü $|\omega| = \dfrac{1}{2}$ çemberinin alt yarısı olur.



4) (a) $f(z) = \text{Arg}\,(z)$ fonksiyonunun negatif reel eksen üzerinde sürekli olmadığını ispatlayınız. **(10 puan)**

(b) $\omega = \text{arcsinh}(z)$ çok-değerli fonksiyonunun tanımını elde ediniz. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) $\alpha < 0$ herhangi bir negatif reel sayı olsun. Bu durumda α sayısına $|z| = -\alpha$ çemberi üzerinden iki farklı şekilde yaklaşmak mümkündür. İlk olarak ikinci bölge üzerinden yaklaşalım; yani çember üzerinde $z = -\alpha e^{i\theta}$ (burada $\theta = Arg(z)$) olmak üzere $\theta \to \pi$ olduğunda $z \to \alpha$ yaklaşımı gerçeklenir. Buna göre

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{\theta\to\pi} (\theta) = \pi$$

olur. Diğer taraftan, üçüncü bölge üzerinden yaklaşmak istersek bu durumda $\theta \to -\pi$ olduğunda yine $z \to \alpha$ yaklaşımı elde edilir. Buradan

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{\theta\to-\pi} (\theta) = -\pi$$

dir. Dolayısıyla $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$ limiti mevcut olmadığından, $f(z) = \text{Arg}\,(z)$ fonksiyonu herhangi bir α negatif reel sayısıyda sürekli olamaz.

(b) $\omega = \text{arcsinh}(z) \Leftrightarrow \sinh\omega = z$ olur. Burada tanımı kullanarak

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} &= z \Rightarrow e^{\omega} - 2z - e^{-\omega} = 0 \\
&\Rightarrow e^{2\omega} - 2ze^{\omega} - 1 = 0 \\
&\Rightarrow e^{\omega} = z + \left(1+z^2\right)^{1/2} \\
&\Rightarrow \omega = \text{arcsinh}(z) = \log\left(z + \left(1+z^2\right)^{1/2}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

5) (a) $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere hangi koşul altında $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ eşitliğinin gerçekleneceğini gösteriniz. **(10 puan)**

(b) $i^{\,i}$ ifadesini $a + ib$ formatında yazınız. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Eşitlik olabilmesi için $|z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2$ gerçeklenmelidir. Burada $|z|^2 = z\,\bar{z}$ bilgsini kullanırsak

$$(z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1 z_2|$$

olup buradan

$$z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}\;z_2 = 2\,|z_1 z_2| \Rightarrow \text{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) = |z_1 z_2| = \left|z_1\overline{z_2}\right| \geq 0$$

olmalıdır. $\omega = z_1\overline{z_2}$ kompleks sayısının reel kısmı modülüne eşit olduğuna göre bu durum ancak $\omega = \beta \geq 0$ olması ile mümkündür. Yani

$$z_1\overline{z_2} = \beta \geq 0$$

olmalıdır. Zaten $z_1 = z_2 = 0$ ise eşitlik gerçeklenir. Eğer herhangi biri sıfırdan farklıysa, diyelim ki $z_2 \neq 0$, bu durumda

$$z_1\overline{z_2} = \frac{z_1}{z_2}\,|z_2| = \beta \geq 0$$

olup buradan

$$z_1 = \alpha z_2, \ \alpha \geq 0$$

yazılabilir.

(b) Kompleks kuvvet tanımından yararlanırsak

$$\begin{aligned} i^i &= e^{i\log(i)} = e^{i(\ln|i|+i\arg(i))} \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

elde edilir.