28 Mart 2017

1	2	3	4	5	Toplam

Adı Soyadı:

Öğrenci No:

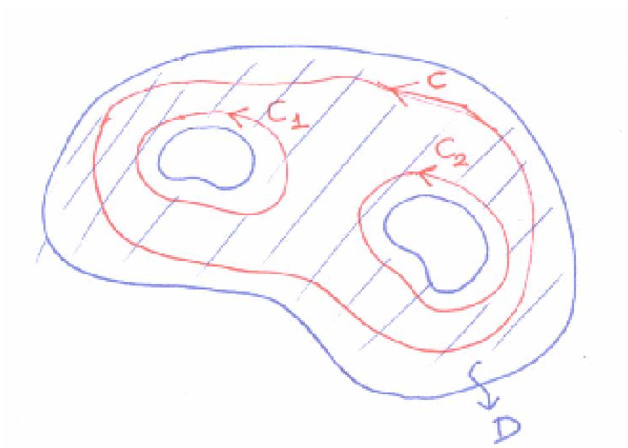
İmza:

MAT 537 FONKSİYONLAR TEORİSİ I
ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

1) Şekildeki gibi çok irtibatlı (bağlantılı) bir D bölgesi ve pozitif yönlü basit kapalı C, C_1, C_2 çevreleri verilsin. Eğer bir f fonksiyonu D bölgesinde analitik ise bu durumda Cauchy-Goursat Teoreminden yararlanarak

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

olduğunu gösteriniz. (**20 puan**)



ÇÖZÜM.

Verilen bölgeyi şekildeki gibi A,B,C,D noktalarından keserek basit kapalı ve pozitif yönlü Γ eğrisini şu şekilde oluşturabiliriz:

$$\Gamma = C \cup |AB| \cup (-C_1) \cup |BA| \cup |CD| \cup (-C_2) \cup |DC|\,.$$

Bu durumda f fonksiyonu Γ nın içinde ve üzerinde analitik olur. Dolayısıyla Cauchy-Goursat Teoremi uyarınca

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 0$$

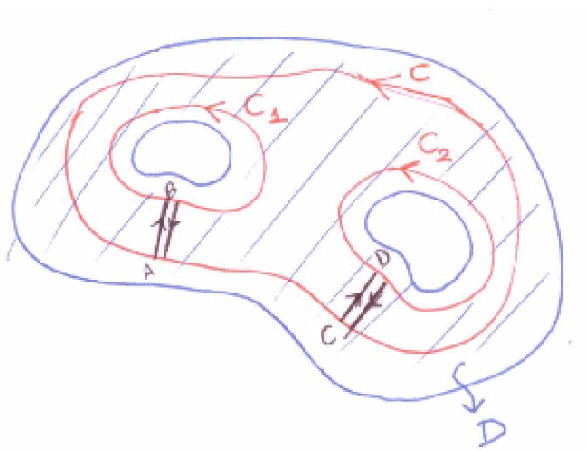
olmak zorundadır. Bu son eşitlikten

$$\oint_C f(z)dz + \oint_{|AB|} f(z)dz + \oint_{-C_1} f(z)dz + \oint_{|BA|} f(z)dz + \oint_{|CD|} f(z)dz + \oint_{-C_2} f(z)dz + \oint_{|DC|} f(z)dz = 0$$

olup buradan

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz$$

elde edilir.



2) (a) *Cauchy eşitsizliği*: f, basit irtibatlı bir D bölgesinde analitik olsun ve pozitif yönlü $C : |z - z_0| = r$ çemberi tamamen D içinde kalsın. Eğer çember üzerindeki her $z \in C$ için $|f(z)| \leq M$ oluyorsa, bu durumda $\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \dfrac{n!M}{r^n}$ $(n = 1, 2, ...)$ eşitsizliği gerçeklenir. İspatlayınız. **(10 puan)**

(b) *Liouville Teoremi:* Bir tam fonksiyon sınırlı ise sabit olmak zorundadır. İspatlayınız. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Hipotezden her $z \in C$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|\frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\right| = \frac{|f(z)|}{r^{n+1}} \leq \frac{M}{r^{n+1}}$$

yazabiliriz. Cauchy İntegral/Türev Formülünden

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi her iki yanın modülünü alıp ML-eşitsizliğini uygularsak

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| = \frac{n!}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!M}{r^n}$$

bulunur.

(b) f sınırlı bir tam fonksiyon olsun; yani f, kompleks düzlemin tamamında analitik olsun ve her $z \in \mathbb{C}$ için $|f(z)| \leq M$ gerçeklensin. Cauchy eşitsizliğinde $n = 1$ alarak herhangi bir z_0 merkezli ve herhangi bir r yarıçaplı ($|z - z_0| = r$) bir C çemberi göz önüne alındığında

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \frac{M}{r}$$

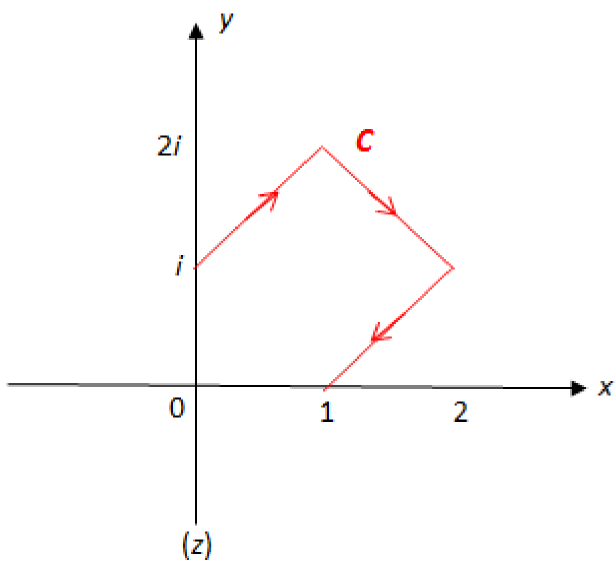
bulunur. Bu eşitsizlikte r keyfi olduğundan yeterince büyük seçilerek $r \to \infty$ iken $|f'(z_0)| = 0$ ve buradan da $f'(z_0) = 0$ olur. z_0 noktasının seçimi de keyfi olduğundan f bir sabit fonksiyon olmak zorundadır.

3) (a) C, pozitif yönlü $|z| = 5$ çemberi olmak üzere $\oint_C \frac{e^z}{(z - i\pi)^4} dz$ integralini hesaplayınız.

(10 puan)

(b) C, aşağıdaki şekilde verilen çevre olsun. Buna göre $\int_C \left(3z^2 - 2z\right) dz$ integralini hesaplayınız.

(10 puan)



ÇÖZÜM.

(a) İntegrantın $z_0 = i\pi$ singüler noktası $C : |z| = 5$ çemberinin içindedir ve $f(z) = e^z$ fonksiyonu tam olduğundan C nin içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy İntegral/Türev Formülüne $n = 3$ alarak

$$\oint_C \frac{e^z}{(z - i\pi)^4} dz = \frac{2\pi i f'''(i\pi)}{3!}$$

bulnur. Burada $f(z) = e^z \Rightarrow f'''(z) = e^z \Rightarrow f'''(i\pi) = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ olduğundan

$$\oint_C \frac{e^z}{(z - i\pi)^4} dz = -\frac{\pi i}{3}$$

elde edilir.

(b) İntegrantta bulunan $f(z) = 3z^2 - 2z$ fonksiyonu tam olduğundan yoldan bağımsızdır. Dolayısıyla şekilde verilen C çevresi yerine başlangıç noktası i ve bitim noktası 1 olan herhangi bir çevre seçilebilir. Üstelik $F(z) = z^3 - z^2$ fonksiyonu f nin bir anti-türevidir; yani her $z \in \mathbb{C}$ için $F'(z) = f(z)$ gerçeklenir. Dolayısıyla kompleks integrasyonun temel teoreminden

$$\int_C \left(3z^2 - 2z\right) dz = \int_i^1 \left(3z^2 - 2z\right) dz = F(1) - F(i) = (1-1) - (-i+1) = -1 + i$$

olarak hesaplanır.

4) (a) $e^z = -3$ denkleminin tüm köklerini hesaplayınız. **(10 puan)**

(b) $\omega = e^z$ dönüşümü altında $x = 2\,,\ -\pi < y \leq \pi$ doğru parçasının görüntüsünü bulunuz ve bunları karşılık gelen düzlemlerde gösteriniz. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) $e^z = -3$ denkleminin her iki yanında kompleks logaritma alarak

$$z = \log(-3) = \ln|-3| + i\arg(-3)$$

olur. Kompleks logaritmanın tanımından, tüm kökler

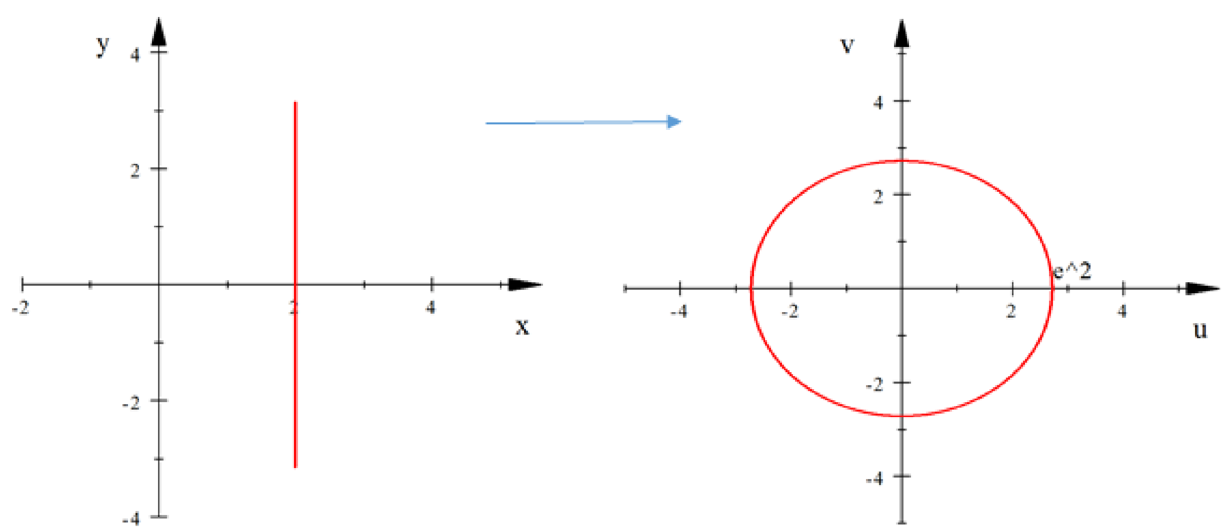
$$z = z_k = \ln 3 + i\,(\pi + 2k\pi)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

şeklinde elde edilir.

(b) $z = x + iy$ alarak $\omega = e^z = e^x e^{iy}$ olup $x = 2\,,\ -\pi < y \leq \pi$ verildiğinden dolayı

$$\omega = e^2 e^{iy}, \quad -\pi < y \leq \pi.$$

Bu son ifade ise $|\omega| = e^2$ çemberini belirler (yani, orijin merkezli e^2 yarıçaplı çember).



5) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$ fonksiyonu veriliyor.

(a) u nun harmonik olduğu bölgeyi bulunuz. **(5 puan)**

(b) u nun v harmonik eşleniğini belirleyiniz. **(10 puan)**

(c) $f(i) = i$ koşulunu sağlayan $f(z) = u + iv$ analitik fonksiyonunu inşa ediniz. **(5 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) $u_x = 3x^2 - 3y^2$, $u_{xx} = 6x$, $u_y = -6xy$, $u_{yy} = -6x$ olup u nun birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri tüm kompleks düzlemde süreklidir. Ayrıca yine $\mathbb{C}$ üzerinde

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Laplace denklemi gerçeklenir. Dolayısıyla verilen u fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tamammında harmoniktir.

(b) u nun v harmonik eşleniğini bulmak için $u_x = v_y$ ve $u_y = -v_x$ Cauchy-Riemann Denklemlerinden yararlanırız. Buna göre

$$\begin{aligned} v_y &= 3x^2 - 3y^2 \\ v_x &= 6xy \end{aligned}$$

olur. İlk denklemde her iki yanın y ye göre integralini alarak

$$v(x, y) = \int \left(3x^2 - 3y^2\right) dy = 3x^2 y - y^3 + h(x)$$

bulunur. Şimdi de bu son ifadede x e göre kısmi türev alıp yukarıdaki ikinci denklemi kullanırsak

$$v_x = 6xy + h'(x) = 6xy$$

ve böylece

$$h(x) = C = reel\ sabit.$$

olur. Dolayısıyla u nun v harmonik eşleniği

$$v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + C$$

şeklinde elde edilir.

(c) u nun v harmonik eşleniğini yardımıyla elde edilen $f(z) = u + iv$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tamammında analitik olup bir tam fonksiyondur. Sonuç olarak

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3 + C\right)$$

fonksiyonu tamdır. $f(i) = i$ olduğuna göre $x = 0$ ve $y = 1$ alarak

$$i = -i + iC \Rightarrow C = 2$$

olur; yani

$$f(z) = x^3 - 3xy^2 + i\left(3x^2 y - y^3\right) + 2i$$

bulnur. Aslında bu son ifade

$$f(z) = z^3 + 2i$$

fonksiyonudur.