MAT 411 ve MAT 533
ÖDEV SORULARI

1. (E_n) artan bir küme dizisi olsun. $S_1 = E_1$ ve $n = 2, 3, ...$ için $S_n = E_n \backslash E_{n-1}$ olacak şekilde (S_n) dizisi tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz.

   (a) (S_n) ayrıktır.

   (b) $E_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$

   (c) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$

2. (B_n) azalan bir küme dizisi olsun. $n = 1, 2, 3, ...$ için $T_n = B_1 \backslash B_n$ olacak şekilde (T_n) dizisi tanımlanıyor. Buna göre aşağıdakileri gösteriniz.

   (a) (T_n) artandır.

   (b) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T_n = B_1 \backslash \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$

3. (B_n) azalan bir dizi ise $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ olduğunu gösteriniz.

4. X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir cebir olsun. Eğer $\mathcal{A}$ cebiri azalan dizilerin kesişimi altında kapalı ise $\mathcal{A}$ nın bir σ-cebir olacağını gösteriniz.

5. $\mathcal{A}$ bir cebir olsun. (E_n), $\mathcal{A}$ daki elemanların keyfi ayrık bir dizi olmak üzere $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$ oluyorsa, bu durumda A nın bir σ-cebir olduğunu gösteriniz.

6. $[a, b] = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(a - \dfrac{1}{n}, b + \dfrac{1}{n}\right)$ olduğunu ispatlayınız.

7. $X \neq \phi$ ve $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ olsun. $s \in X$ verilsin. Her bir $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu_s(E) = \begin{cases} 1, & s \in E \text{ ise} \\ 0, & s \notin E \text{ ise} \end{cases}$$

   şeklinde tanımlanan μ_s fonksiyonunun $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olduğunu gösteriniz.

8. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $A \in \mathcal{A}$ olsun. Her $E \in \mathcal{A}$ için $\lambda_A(E) = \mu(E \backslash A)$ şeklinde tanımlanan λ_A fonksiyonu $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olur mu, neden?

9. $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ ler $\mathcal{A}$ σ-cebiri üzerinde birer ölçü ve $a_1, a_2, ..., a_n$ ler negatif olmayan reel sayılar ise, her bir $E \in \mathcal{A}$ için

$$\lambda(E) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_k(E)$$

   ile tanımlı λ fonksiyonu $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü olur mu, neden?

10. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}\mathbb{N})$ ve (a_n) negatif olmayan reel sayıların bir dizi ise, her bir $E \in \mathcal{A}$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 0, & E = \phi \text{ ise} \\ \sum\limits_{n \in E} a_n, & E \neq \phi \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde bir μ fonksiyonu tanımlanıyor.

(a) μ, $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü müdür, neden?

(b) $a_n = \dfrac{n}{(n+1)!}$ alınırsa $\mu(\mathbb{N}) =?$ ve $\mu(\{1,2,3\}) =?$

(c) $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ alınırsa $\mu(\mathbb{N}) =?$

11. $B \subset \mathbb{R}$ kümesi Lebesgue ölçülebilir ise her bir $x \in \mathbb{R}$ için $B + x$ kümesinin de Lebesgue ölçülebilir olduğunu ispatlayınız.

12. λ Lebesgue ölçüsünü göstermek üzere $A = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in R : \dfrac{1}{2^k} \leq x < \dfrac{1}{2^{k-1}} \right\}$ kümesi için $\lambda(A)$ değerini hesaplayınız.

13. $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f|$ fonksiyonunun da ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

14. f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul f^+ ve f^- fonksiyonlarının da ölçülebilir olmasıdır. İspatlayınız.

15. $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve $f : X \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $A_0 = \{x \in X : f(x) \geq 0\}$ olmak üzere $\sqrt{f} : A_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonun da ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

16. Aşağıdakileri gösteriniz.

(a) $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$

(b) $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$

17. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı veriliyor. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı aşağıdaki fonksiyon dizilerinin Fatou Lemma'sını gerçekleyip gerçeklemedğini gösteriniz.

(a) $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$

(b) $f_n = \chi_{[n, n+1]}$

(c) $f_n = \chi_{[n, +\infty]}$

18. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı veriliyor. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f_n = \dfrac{n}{n+1}\chi_{[-\frac{n+1}{n}, \frac{n+1}{n}]}$ fonksiyon dizisi için $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ değerini hesaplayınız.

19. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ ölçü uzayı veriliyor. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$ fonksiyon dizisi ve $f = 0$ fonksiyonu veriliyor.

(a) $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n \to f$ olur mu? (yani, noktasal yakınsaklık var mı?)

(b) $\mathbb{R}$ üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ olur mu? (yani, düzgün yakınsaklık var mı?)

(c) Monoton Yakınsaklık Teoremi ve Fatoru Lemması uygulanabilir mi, neden?

Güncelleme tarihi: 31/10/2017