24 Mart 2017

1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı:

Öğrenci No:

İmza:

MAT 311 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
2. ARASINAV SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

1) (a) $\cos z = 2i$ denkleminin tüm köklerini bulunuz. **(15 puan)**

(b) Her $z \in \mathbb{C}$ için $\sinh(iz) = i \sin z$ olduğunu ispatlayınız. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) $e^{iz} + e^{-iz} = 4i$ olup buradan $e^{2iz} - 4ie^{iz} + 1 = 0$ bulunur. Burada $e^{iz} = \omega$ denirse

$$\omega^2 - 4i\omega + 1 = 0 \Rightarrow \omega = \frac{4i \pm i2\sqrt{5}}{2} = i\left(2 \pm \sqrt{5}\right)$$

elde edilir. $e^{iz} = \omega$ olduğundan

$$\begin{aligned} e^{iz} &= i\left(2 \pm \sqrt{5}\right) \Rightarrow iz = \log\left(i\left(2 \pm \sqrt{5}\right)\right) \\ &\Rightarrow z = \frac{1}{i}\left\{\ln\left|i\left(2 \pm \sqrt{5}\right)\right| + i\arg\left(i\left(2 \pm \sqrt{5}\right)\right)\right\} \\ &\Rightarrow z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \text{ veya } z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i\ln\left(\sqrt{5} - 2\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

bulunur.

(b) Her $z \in \mathbb{C}$ için hiperbolik fonksiyonun tanınımdan

$$\begin{aligned} \sinh(iz) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} \\ &= i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ &= i \sin z \end{aligned}$$

olduğu açıktır.

2) (a) $\omega = \arctan z$ fonksiyonun tanımını elde ediniz. **(15 puan)**

(b) $\arctan(1 + i)$ nin tüm değerlerini hesaplayınız.. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Tanımdan

$$\omega = \arctan z \Leftrightarrow \tan \omega = z$$

yazabiliriz. Şimdi tanjant fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned}
\frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{i\left(e^{i\omega} + e^{-i\omega}\right)} &= z \Rightarrow (iz-1)e^{i\omega} + (iz+1)\,e^{-i\omega} = 0 \\
&\Rightarrow e^{2i\omega} = -\frac{iz+1}{iz-1} = \frac{i-z}{i+z} \\
&\Rightarrow 2i\omega = \log\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \\
&\Rightarrow \omega = \arctan z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-z}{i+z}\right)
\end{aligned}$$

bulunur.

(b) Şimdi (a)'da elde edilen tanımda $z = 1+i$ alarak

$$\begin{aligned}
\arctan(1+i) &= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{i-(1+i)}{i+(1+i)}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\log\left(\frac{-1}{1+2i}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\left\{\ln\left|\frac{-1+2i}{5}\right| + i\arg\left(\frac{-1+2i}{5}\right)\right\} \\
&= \left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) - \frac{i}{2}\ln\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ k \in \mathbb{Z},
\end{aligned}$$

burada θ açısı ikinci bölgede olup $\cos\theta = -\frac{1}{5}$ ve $\sin\theta = \frac{2}{5}$ koşullarını sağlamaktadır.

3) (a) Cauchy-Goursat Teoremini ifade ediniz. **(10 puan)**

(b) C, köşeleri i, $2+i$ ve $1+2i$ noktalarında bulunan üçgen olmak üzere $\oint_C \left(z^2 - e^z\right) dz$ integralini hesaplayınız. **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) *Cauchy-Goursat Teoremi*: C, parçalı düzgün basit kapalı bir çevre olsun. Eğer f fonksiyonu C nin içinde ve üzerinde analitik ise, bu durumda

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

dır.

(b) C, köşeleri i, $2+i$ ve $1+2i$ noktalarında bulunan üçgen olduğuna göre parçalı düzgün basit kapalı bir çevredir. Ayrıca $f(z) = z^2 - e^z$ bir tam fonksiyon olup C nin içinde ve üzerinde analitiktir. Dolayısıyla Cauchy-Goursat Teoremi uyarınna

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C \left(z^2 - e^z\right) dz = 0$$

bulunur.

4) (a) Cauchy İntegral/Türev Formüllerini ifade ediniz. **(10 puan)**

(b) $\oint\limits_C \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz$ integralini hesaplayınız; burada C, pozitif yönde yönlendirilmiş $|z| = 4$ çemberidir. **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) *Cauchy İntegral/Türev Formülleri*: C, parçalı düzgün basit kapalı bir çevre olsun ve z_0 noktası C çevresi içerisinde bulunsun. Eğer f fonksiyonu C nin içinde ve üzerinde analitik ise, bu durumda

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz = 2\pi i \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

(b) İntegrantın $z_0 = 0$ ve $z_1 = i$ singüler noktaları $C : |z| = 4$ çemberinin içerisine düşmektedir. Çok iritibatlı bölgeler için Cauchy-Goursat Teoreminden yararlanırsak

$$\oint\limits_C \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = \oint\limits_{C_0} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz + \oint\limits_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz$$

yazabiliriz; burada $C_0 : |z| = 1/3$ (pozitif yönlü) ve $C_1 : |z-i| = 1/3$ (pozitif yönlü) çemberleridir. Şimdi eşitliğin sağındaki ilk integralde $f(z) = \frac{z^2+1}{(z-i)^2}$ ve ikinci integralde de $g(z) = \frac{z^2+1}{z}$ seçelim. Bu durumda f, C_0 çemberinin içinde ve üzerinde analitik olup yukarıdaki formülde $n = 0$ alırsak

$$\oint\limits_{C_0} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = \oint\limits_{C_0} \frac{f(z)}{z-0}dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i$$

bulunur. Benzer düşünceyle, g fonksiyonu C_1 çemberinin içinde ve üzerinde analitik olup yukarıdaki formülde $n = 1$ alırsak

$$\oint\limits_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = \oint\limits_{C_1} \frac{g(z)}{(z-i)^2}dz = 2\pi i g'(i)$$

olup $g'(z) = 1 - \frac{1}{z^2}$ olduğundan $g'(i) = 2$ olmalıdır; yani

$$\oint\limits_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = 4\pi i$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\oint\limits_C \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = \oint\limits_{C_0} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz + \oint\limits_{C_1} \frac{z^2+1}{z(z-i)^2}dz = 2\pi i$$

elde edilir.