13 Nisan 2017

1	2	3	4	5	Toplam

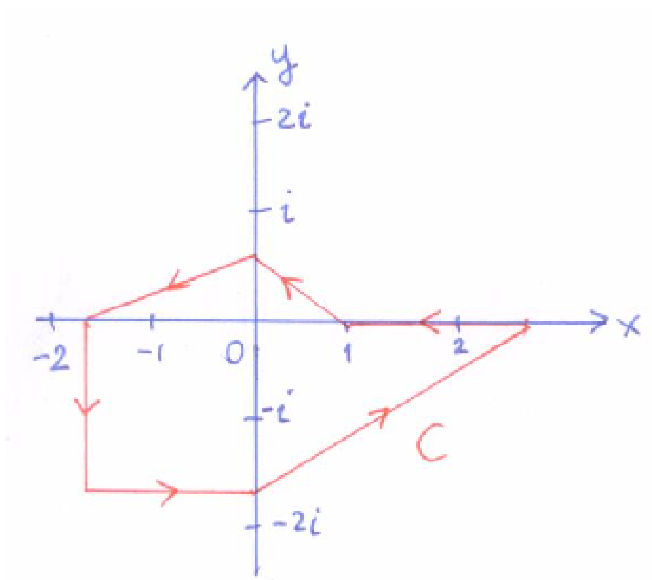
Adı Soyadı:

Öğrenci No:

İmza:

MAT 311 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
DÖNEM SONU SINAVI

1) Şekildeki gibi doğru parçalarının birleşiminden oluşan C çevresi veriliyor. Buna göre $\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z+i}dz$ integralini hesaplayınız. (**20 puan**)



ÇÖZÜM. İntegrantın $z = -i$ singüler noktası C çevresiinin içerisindedir. $f(z) = e^{\pi z}$ seçersek, f fonksiyonu C nin içinde ve üzerinde analitik olur. Dolayısıyla Cauchy İntegral Formülü uyarınca

$$\oint\limits_C \frac{e^{\pi z}}{z+i}dz \neq 2\pi i f(-i) = 2\pi i e^{-i\pi} = 2\pi i\left(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\right) = -2\pi i$$

olarak elde edilir.

2) (a) C, $y = x^2$ parabolünün orijini $(2,4)$ noktasına birleştiren parçası olmak üzere $\int\limits_C \mathrm{Re}(z)dz$ integralini hesaplayınız. **(10 puan)**

(b) C, kompleks düzlemdeki A ve B noktaları birleştiren herhangi bir çevre olsun. $\int\limits_C z^2 \sin z dz$ integralinin neden yoldan bağımsız olduğunu kısaca açıklayınız. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) C çevresi, $z = x + iy = x + ix^2$, $0 \le x \le 2$ şeklinde parametrik olarak yazılabilir. Burada $dz = (1 + 2ix)dx$ olacağından

$$\begin{aligned} \int\limits_C \mathrm{Re}(z)dz &= \int\limits_0^2 x(1+2ix)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2ix^3}{3}\right)\Big|_0^2 \\ &= 2 + \frac{16i}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

(b) $f(z) = z^2 \sin z$ dersek, f bir tam foonksiyondur; yani kompleks düzlemin tamamında analitiktir. Dolayısıyla $\mathbb{C}$ üzerinde bir anti-türeve sahiptir; yani her $z \in \mathbb{C}$ için $F'(z) = f(z)$ olacak şekilde bir F fonksiyonu vardır. Kompleks integrasyonun temel teoremi uyarınca

$$\int\limits_C z^2 \sin z dz = F(B) - F(A)$$

olur. Dolayısıyla integralin sonucu (başlangıç ve bitim noktaları aynı kalmak şartıyla) C çevresinin seçimine bağlı değildir; yani integral yoldan bağımsızdır.

3) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2 \text{ ve } 0 \le \arg(z) \le \pi\}$ kümesinin aşağıdaki dönüşümler altındaki görüntülerini bulunuz ve bunları karşılık gelen düzlemlerde gösteriniz.

(a) $\omega = z^2$ dönüşümü **(10 puan)**

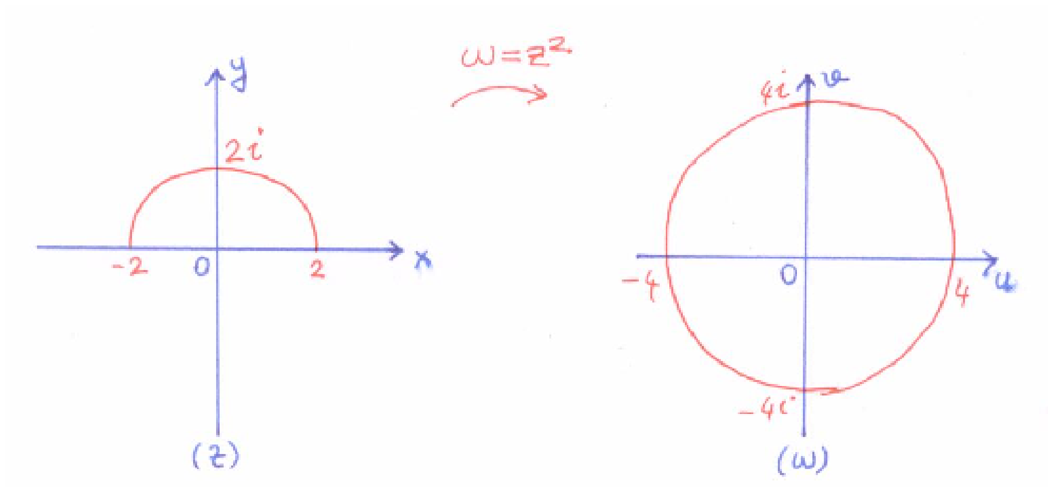
(b) $\omega = \dfrac{1}{z}$ dönüşümü **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

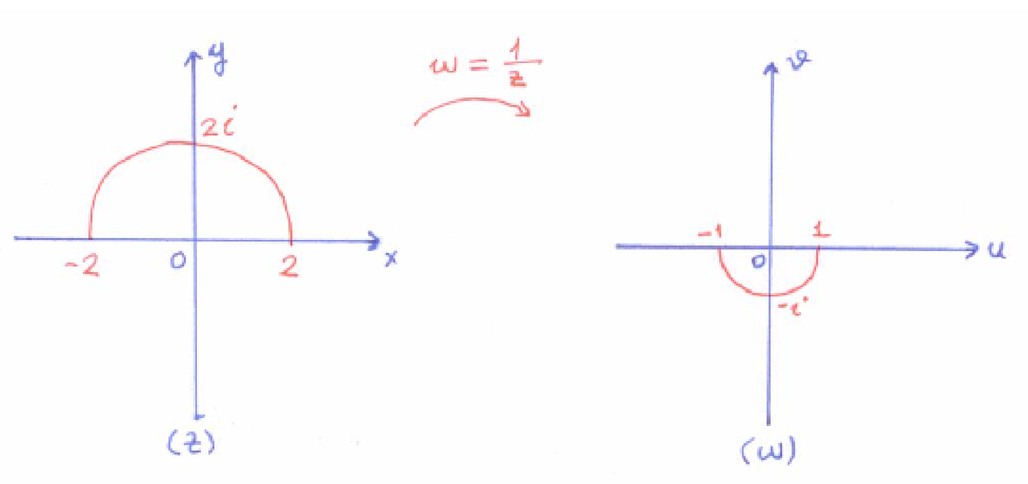
(a) $z \in S$ olduğunda $z = re^{i\theta} = 2e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le \pi$ yazabiliriz. $\omega = z^2$ dönüşümü verildiğine göre

$$\omega = r^2 e^{i2\theta} = 4e^{i2\theta}, \quad 0 \le 2\theta \le 2\pi$$

elde edilir. O halde S nin görüntüsü $|\omega| = 4$ çemberinin tamamı olur.



(b) $\omega = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{re^{i\theta}} = \dfrac{1}{2}e^{-i\theta}$, $\;-\pi \leq -\theta \leq 0$ olduğundan dolayı S nin görüntüsü $|\omega| = \dfrac{1}{2}$ çemberinin alt yarısı olur.



4) (a) $f(z) = \text{Log}\ (z)$ fonksiyonunu tanımlayınız ve bundan yararlanarak Log $(1+i)$ değerini hesaplayınız. **(10 puan)**

(b) $f(z) = \text{Log}\ (z)$ fonksiyonunun $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 0 \text{ ve } -\pi < \arg(z) < \pi\}$ bölgesinde analitik olduğu bilindiğine göre her $z \in D$ için $f'(z) = \dfrac{1}{z}$ olduğunu gösteriniz. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) $f(z) = \text{Log}\ (z) = \ln|z| + i\ \text{Arg}\ (z)$ şeklinde tanımlanır. Buradan Log $(1+i) = \ln|1+i| + i$ Arg $(1+i)) = \ln\sqrt{2} + i\dfrac{\pi}{4}$ olarak bulunur.

(b) **1. Yöntem:** $z = re^{i\theta}$ olmak üzere D bölgesi üzerinde $f(z) = \text{Log}\ (z) = \ln r + i\theta$ $(r > 0$ ve $-\pi < \theta < \pi)$ şeklinde yazılabilir. Yani $f = u + iv$ şeklinde düşünürsek

$$u = \ln r \text{ ve } v = \theta.$$

Analitik fonksiyonlar için $f'(z) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r)$ olduğunu biliyoruz. Buna göre her $z \in D$ için

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + 0i\right) = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{z}$$

bulunur.

2. Yöntem: $z = x + iy$ alarak $f(z) = \text{Log }(z) = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ şeklinde yazabiliriz. Bu durumda $f = u + iv$ fonksiyonu için

$$u = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ve} \quad v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

olur. Kartezyen formada verilen analitik fonksiyonlar için türev $f'(z) = u_x + iv_x$ şeklinde hesaplandığına göre her $z \in D$ için

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{\left(\frac{y}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z} \end{aligned}$$

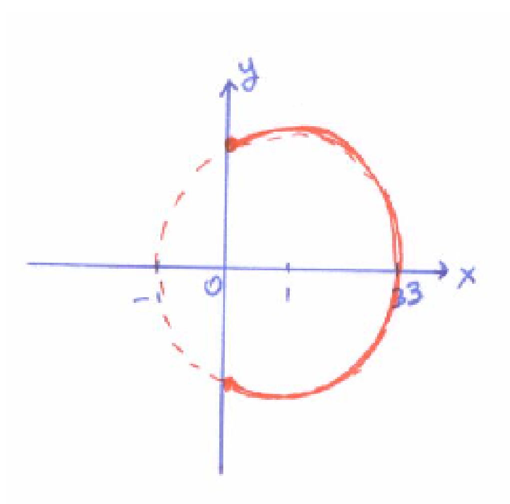
bulunur.

5) (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 2 \text{ ve } \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$ kümesini kompleks düzlemde gösteriniz ve bunun bir bölge olup olmadığını araştırınız. **(10 puan)**

(b) $(1+i)^{121}$ sayısını $a + ib$ formatında yazınız. **(10 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) S nin kompleks düzlemdeki şekli aşağıdaki gibidir:



S nin bir bölge olabilmesi için açık ve irtibatlı (bağlantılı) küme olması gerekir. Fakat, S kümesinin her noktası bir sınır noktası olduğundan S açık bir küme olamaz; dolayısıyla bir bölge değildir.

(b) $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$ şeklinde kutupsal gösterime sahiptir. Euler formülü uyarınca

$$\begin{aligned}
(1+i)^{121} &= (1+i)^{120}(1+i) \\
&= \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^{120}(1+i) \\
&= 2^{60}e^{i30\pi}(1+i) \\
&= 2^{60}(\cos(30\pi)+i\sin(30\pi))(1+i) \\
&= 2^{60}(1+i)
\end{aligned}$$