27 Ekim 2016

1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı:

Öğrenci No:

İmza:

MAT 210 İLERİ ANALİZ II
1. ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

1) (a) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere verilen bir (f_k) fonksiyon dizisinin S kümesi üzerinde bir $f : S \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmasını tanımlayınız. **(10 puan)**

(b) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere $[a,b]$ üzerinde $f_k \rightrightarrows f$ gerçeklensin. Bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

olduğunu ispatlayınız. **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) S üzerinde $f_k \rightrightarrows f$ olması şu demektir: $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in S$ ve $\forall k > k_0$ için $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ gerçeklenir.

(b) Öncelikle biliyoruz ki düzgün yakınsaklık, sürekliliği korur; yani her bir f_k, $[a,b]$ üzerinde sürekli ve $f_k \rightrightarrows f$ oluyorsa, bu durumda f fonksiyonu da $[a,b]$ üzerinde sürekli olup Riemann anlamında integrallenebilirdir. Şimdi, $[a,b]$ üzerinde $f_k \rightrightarrows f$ olmasından, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) > 0 \ni \forall x \in [a,b]$ ve $\forall k > k_0$ için $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$ yazabiliriz. Dolayısıyla yine $k > k_0$ olduğu sürece

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_k(x) - f(x))\, dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)|\, dx \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \int_a^b dx = \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise $\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ olduğunu gösterir.

2) Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_k(x) = kxe^{-kx^2}$ olacak şekilde (f_k) fonksiyon dizisi veriliyor. Buna göre $[0,1]$ aralığı üzerinde (f_k) dizisi:

(a) noktasal yakınsak mıdır, neden? **(10 puan)**

(b) düzgün yakınsak mıdır, neden? **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Her bir $x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{kx}{e^{kx^2}} = 0 = f(x)$ olduğu görülmektedir; yani $[0,1]$ üzerinde (f_k) fonksiyon dizisi $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır.

(b) Şimdi (a) şıkkındaki noktasal yakınsamanın düzgün olup olmadığını araştıralım. Bunun için 1. sorunun (b) şıkkından yararlanabiliriz. Gerçekten $\int_0^1 f(x)dx = 0$ olmasına rağmen

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x)dx &= \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{kx}{e^{kx^2}}dx \\
&= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{k}{e^{ku}}du \\
&= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left(-e^{-ku}\Big|_{u=0}^{u=1}\right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{e^k}\right) \\
&= \frac{1}{2} \neq 0
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla yakınsama düzgün olamaz.

(b) şıkkı için 2. yol: Eğer

$$c_k = \sup_{x\in[0,1]} |f_k(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{kx}{e^{kx^2}}$$

şeklinde tanımlarsak, biliyoruz ki $[0,1]$ üzerinde $f_k \rightrightarrows f = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$ olmasıdır. Buna göre $k \in \mathbb{N}$ sabit tutulmak üzere $g(x) = \dfrac{kx}{e^{kx^2}}$ fonksiyonun $[0,1]$ üzerindeki supremum (yani maksimum) değerini hesaplamamız gerekir. g nin $[0,1]$ aralığına düşen kritik noktaları $g'(x) = 0$ yazılarak bulunabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{ke^{kx^2} - 2k^2x^2e^{kx^2}}{\left(e^{kx^2}\right)^2} = 0 \\
&\Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{2k}} \in [0,1] \text{ (her bir } k \text{ için)}
\end{aligned}$$

elde edilir. $[0,1]$ üzerinde g nin türevinin işaret incelemesini yaparsak $x = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ noktasında g nin maksimum değer aldığını görürüz; yani

$$c_k = \sup_{x\in[0,1]} \frac{kx}{e^{kx^2}} = g\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \frac{k}{\sqrt{2ek}}$$

bulunur. Burada $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\dfrac{k}{\sqrt{2ek}}\right) = \infty$ olduğundan, (f_k) fonksiyon dizisinin $f = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaması $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün olamaz.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^3 3^k}$ kuvvet serisi veriliyor. Buna göre:

(a) Kuvvet serisinin yakınsaklık aralığını bulunuz. **(10 puan)**

(b) Kuvvet serisi aynı yakınsaklık aralığı üzerinde düzgün yakınsak mıdır, neden? **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Kuvvet serisinin $x = 0$ da yakınsak olduğu açıktır. O halde $x \neq 0$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)^3 3^{k+1}} \frac{k^3 3^k}{x^k} \right| = \frac{|x|}{3}$$

elde edilir. Buna göre $|x| < 3$ için seri mutlak yakınsak (yani yakınsak), $|x| > 3$ için ıraksak olup $|x| = 3$ (yani $x = \pm 3$) için şüpheli hal vardır. Bu uç noktalarda

$$\begin{aligned} x &= 3 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ serisi yakınsak,} \\ x &= -3 \quad \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3} \text{ serisi yakınsak,} \end{aligned}$$

olduğundan verilen kuvvet serisinin (noktasal) yakınsaklık aralığı $[-3, 3]$ kapalı aralığıdır.

(b) Şimdi her $x \in [-3, 3]$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|x| \leq 3 \Rightarrow |f_k(x)| = \left| \frac{x^k}{k^3 3^k} \right| \leq \frac{1}{k^3} =: M_k$$

ve ayrıca

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ serisi yakınsak}$$

olduğundan Weierstrass M-Testi uyarında verilen kuvvet serisi $[-3, 3]$ aralığı üzerinde aynı zamanda düzgün yakınsaktır.

4) (a) $D = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgensel bölge üzerinde sınırlı olan bir $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun integrallanebilmesi ne demektir? (*Burada uygulanan adımları kısaca özetleyiniz*). **(10 puan)**

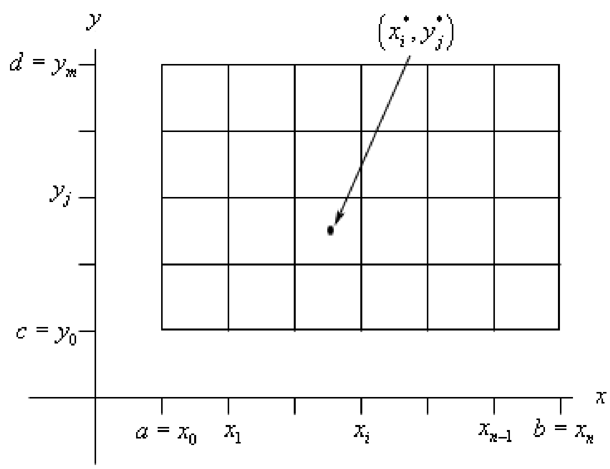
(b) $D = [0,1] \times [0,2]$ olduğunda

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D,\ x \text{ ve } y \text{ rasyonel ise} \\ -1, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu, D dikdörtgensel bölgesi üzerinde integrallenebilir midir, neden? **(15 puan)**

ÇÖZÜM.

(a) Aşağıdaki şekilde olduğu gibi öncelikle $D = [a,b] \times [c,d]$ dikdörtgeninin keyfi bir $P = \{R_{ij} : i = 1,2,...,n;\ j = 1,2,...,m\}$ parçalanmasını göz önüne alırız.



Bu şekildeki her bir küçük hücreyi R_{ij} ile gösterdiğimize dikkat ediniz. Şimdi her bir R_{ij} hücresinden birer keyfi (x_i^*, y_j^*) temsilci noktası seçelim. Yukarıdaki parçalanmaya göre bu tip temsilci noktalardan toplam mn adet seçmek durumundayız. Her bir R_{ij} dikdörtgeninin alanını $A(R_{ij})$ ile gösterirsek, bu durumda

$$S(P,f) := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) A\left(R_{ij}\right)$$

toplamına f nin P parçalanmasına göre "Riemann toplamı" adı verilir. Bu toplam şüphesiz temsilci noktalarının seçimine de bağlıdır. Her bir R_{ij} dikdörtgeninin köşegen uzunluğunu r_{ij} ile gösterilirse, P parçalanmasının boyu (normu)

$$\|P\| := \max_{\substack{i=1,2,...,n \\ j=1,2,...,m}} r_{ij}$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre, eğer

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P,f)$$

limiti mevcut ise bu durumda f fonksiyonu D dikdörtgeni üzerinde Riemann anlamında integrallenebilirdir deriz ve bunu $\iint\limits_D f(x,y)dA$ ile gösteririz.

(b) Şimdi $D = [0,1] \times [0,2]$ dlkdörtgeninin herhangi bir parçalanmasını göz önüne alırsak, tüm R_{ij} hücrelerinde en az bir (hatta sonsuz çoklukta) her iki bileşeni de rasyonel olan $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ temsilci noktalarını seçebiliriz (İki reel sayı arasında her zaman bir rasyonel sayı bulunabileceğini hatırlayınız). Bu seçime göre fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} S(P,f) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) A\left(R_{ij}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A\left(R_{ij}\right) \\ &= 2 \text{ (dikdörtgenin alanı)} \end{aligned}$$

bulunur. Fakat her bir R_{ij} hücresinde irrasyonel sayılar da bulunabileceğinden dolayı, bu sefer $(x_i^*, y_j^*) \in R_{ij}$ temsilci noktalarımızı, en az bir bileşeni irrasyonel olan noktalardan seçelim. Bu seçime kaşılık gelen Riemann toplamı ise, fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} S(P,f) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(x_i^*, y_j^*) A\left(R_{ij}\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A\left(R_{ij}\right) \\ &= -2 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\|P\| \to 0$ iken $S(P,f)$ nin tek bir değere yaklaşmadığını görürüz; yani verilen f fonksiyonu $D = [0,1] \times [0,2]$ dikdörtgeni üzerinde Riemann anlamında integrallenemez.