

Adı ve Soyadı:

12 Aralık 2014

Bölümü:

Cevap Anahtarı

No:

İmza:

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- DÖNEM SONU SINAVI

1) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int \frac{\cos x}{(5 + \sin x)^4} dx$ [8 Puan]

$5 + \sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$

$$I = \int \frac{du}{u^4} = -\frac{u^{-3}}{3} + C = -\frac{1}{3(5 + \sin x)^3} + C$$

(b) $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx$ [8 Puan]

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1}$$

$$\Rightarrow 5x-3 \equiv A(x+1) + B(x-3)$$

$$\Rightarrow 5x-3 \equiv (A+B)x + (A-3B)$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} A+B=5 \\ A-3B=-3 \end{array} \right\} B=2 \text{ ve } A=3$$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{3}{x-3} + \frac{2}{x+1} \right) dx = 3 \ln|x-3| + 2 \ln|x+1| + C$$

(c) $\int \ln(x^2) dx$ [9 Puan]

I. yol: $\ln(x^2) = u \Rightarrow \frac{2x}{x^2} dx = du$

$$\Rightarrow \frac{2dx}{x} = du$$

$$dx = dv \Rightarrow v = x$$

$$I = uv - \int v du = x \ln(x^2) - \int 2 dx \\ = x \ln(x^2) - 2x + C$$

II. yol:

$$I = \int \ln(x^2) dx = 2 \int \ln(x) dx$$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

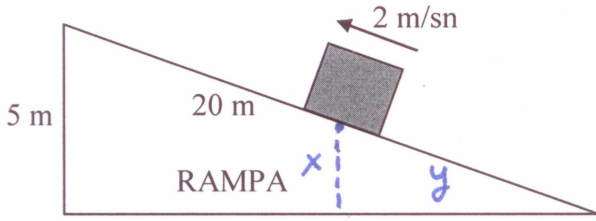
$$I = 2(uv - \int v du)$$

$$= 2(x \ln x - \int dx)$$

$$= 2x \ln x - 2x + C$$

$$= x \ln(x^2) - 2x + C$$

- 2) (a) Bir adam bir kutuyu aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi 20 m uzunluğunda ve 5 m yüksekliğindeki bir rampadan (eğik düzlem) 2 m/sn sabit hızla itmektedir. Buna göre kutunun yükselme hızı kaç m/sn olur? [12 Puan]



x ve y mesafeleri zamana bağlı olarak değişmektedir; buna göre $x=x(t)$, $y=y(t)$ olur.

Üçgenlerin benzerliğinden

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{20} \Rightarrow x = \frac{y}{4} \text{ bulunur.}$$

(Her iki yanın t ye göre türevini alırsak)

$$x'(t) = \frac{y'(t)}{4} \quad (\text{Burada } y'(t) = 2 \text{ m/sn})$$

$$\Rightarrow x'(t) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ m/sn (kutunun yükselme hızı)}$$

- (b) Bir şirket yılda x adet üretilip sattığı şemsiyeden toplam $R(x) = 10x - \frac{x^2}{1000}$ TL gelir elde etmektedir. Şemsiyelerin yıllık üretim maliyeti ise $C(x) = 5000 + 2x$ TL olarak bilinmektedir. Şirketin maksimum kârı elde edebilmesi için yılda kaç adet şemsiye üretmesi gerekir? Bu durumda şirketin yıllık maksimum kârı kaç TL olur? [13 Puan]

$$\text{Kâr} = \text{Gelir} - \text{Maliyet} \quad \text{olduğundan}$$

$$P(x) = 10x - \frac{x^2}{1000} - 5000 - 2x = 8x - \frac{x^2}{1000} - 5000$$

$$\Rightarrow P'(x) = 8 - \frac{x}{500} = 0 \Rightarrow x = 4000 \text{ (tekrirlik nokta)}$$

$$P''(x) = -\frac{1}{500} \Rightarrow P''(4000) = -\frac{1}{500} < 0 \text{ olduğundan}$$

$x = 4000$ adet şemsiye üretildiğinde

$$P(4000) = 32.000 - 16.000 - 5.000 = 11.000 \text{ TL}$$

maksimum kâr elde edilir.

3) (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ limitini araştırınız. [8 Puan]

$\infty - \infty$ belirsizliği var.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{e^x - 1 + x e^x} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{e^x + e^x + x e^x} = -\frac{1}{2}$$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ ise} \\ 0, & x = 0 \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan f fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında sürekli olup

olmadığını araştırınız. [8 Puan]

$f(0) = 0$ tanımlıdır.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (\text{limit mevcut})$$

fakat $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

olduğundan f fonksiyonu $x_0 = 0$ da sürekli değildir.

(c) $f(x) = e^{4x}(1+x^2)^4$ ise $f'(x) = ?$ [9 Puan]

Çarpımın türevini kullanarak

$$f'(x) = 4e^{4x}(1+x^2)^4 + e^{4x} \cdot 4 \cdot 2x(1+x^2)^3$$

$$= 4e^{4x}(1+x^2)^3(1+x^2+2x)$$

$$= 4e^{4x}(1+x^2)^3(x+1)^2$$

- 4) (a) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ fonksiyonunun artan-azalan olduğu aralıkları belirleyiniz ve tüm yerel ekstremumlarını bulunuz. [13 Puan]

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3) = 0$$

$\Rightarrow x=0, x=3$ kritik noktalar.

x		0		3	
f'(x)	-	0	-	0	+
f(x)	→		→		↗

$(-\infty, 3)$ aralığında f azalan
 $(3, +\infty)$ aralığında f artan

$x=3$ te yerel min. vardır.

$$f(3) = 3^4 - 4 \cdot 3^3 + 10 = -17 \text{ yerel min. değeridir.}$$

- (b) $\frac{(x+1)(x-7)}{(x-2)} \leq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz. [12 Puan]

$$x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

$$x-7=0 \Rightarrow x=7$$

$$x-2=0 \Rightarrow x=2 \text{ (bu noktalarda tanımsızlık var)}$$

x		-1		2		7
x+1	-	0	+		+	+
x-7	-	-	-	-	0	+
x-2	-	-	-	+	+	+
$\frac{(x+1)(x-7)}{(x-2)}$	-	+	-	-	+	+

$$C.K = (-\infty, -1] \cup (2, 7]$$

(SINAV SÜRESİ 100 DAKİKADIR)