

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- ARASINAV SORULARI

- 1) (a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ fonksiyonunun reel sayılar üzerindeki tanım kümesini bulunuz. [12 Puan]

$$\frac{x-1}{x+1} \geq 0 \text{ ve } x \neq -1 \text{ olmalıdır.}$$

x	-1	1	
x-1	-	-	+
x+1	-	+	+
$\frac{x-1}{x+1}$	+	-	+

$$D_f = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$$

(f nin tanım kümesi)

- (b) Bir şirket ayda x adet televizyon üretip satmaktadır. Maliyet ve gelir fonksiyonlarının TL cinsinden sırasıyla $C(x) = 72000 + 60x$ ve $R(x) = 200x - \frac{x^2}{30}$ ($0 \leq x \leq 6000$) olduğu bilinmektedir.

Eğer üretim ayda 1500 den 1510 a çıkarılırsa kârda meydana gelecek değişimi diferansiyel kavramı yardımıyla yaklaşık olarak hesaplayınız? [13 Puan]

$$P(x) = R(x) - C(x) = 140x - \frac{x^2}{30} - 72000 \text{ (kâr fonksiyonu)}$$

$$P'(x) = 140 - \frac{x}{15}$$

$$x = 1500$$

$$\Delta x = +10 \text{ seçilirse}$$

$$\underbrace{P(x+\Delta x) - P(x)}_{\text{kârdaki gerçek değişim}} \approx \underbrace{P'(x) \Delta x}_{\text{kârdaki yaklaşık değişim}}$$

$$\text{Kârdaki değişim} \approx P'(1500) \cdot 10$$

$$= 40 \cdot 10$$

$$= 400$$

(yani 400 TL kârda artış olur)

2) (a) $f(x) = \ln(\sin \sqrt{x})$ ise $f'(x) = ?$ [9 Puan]

Zincir kuralından

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos(\sqrt{x})}{\sin(\sqrt{x})} = \frac{\cot(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

(b) $f(x) = |x|$ ise $f'(0)$ mevcut olur mu, neden? [8 Puan]

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h-0}{h} = 1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h-0}{h} = -1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim} \right) \neq$$

olduğundan $f'(0)$ mevcut değildir.

(c) $f(x) = \frac{x}{e^{\cos x}}$ ise $f'(x) = ?$ [8 Puan]

Bölümün türevinden

$$f'(x) = \frac{e^{\cos x} - x(-\sin x)e^{\cos x}}{e^{2\cos x}} = \frac{1 + x\sin x}{e^{\cos x}}$$

- 3) (a) $xy^2 + x^2y - 2 = 0$ şeklinde kapalı olarak verilen $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiğine $(1, -2)$ noktasından çizilen teğet denklemini bulunuz. [10 Puan]

her iki yanın x 'e göre türevini alırsak:

$$y^2 + x \cdot 2yy' + 2xy + x^2y' = 0$$

$$\Rightarrow m = y' \Big|_{(1, -2)} = \frac{-y^2 - 2xy}{x^2 + 2xy} \Big|_{(1, -2)} = \frac{-4 + 4}{1 - 4} = 0 \text{ (eğim)}$$

$$y + 2 = 0(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = -2} \text{ (teğet doğrusu denklemi)}$$

- (b) Aşağıdaki limitleri araştırınız. [15 Puan]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^6 - 1}{x^2 - 1} \right) \quad \frac{0}{0} \text{ belirsizliği var.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^5}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} 3x^4 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{5}{x} \right) \quad \infty \cdot 0 \text{ belirsizliği var.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{5}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \text{ belirsizliği var.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-5/x^2}{1 + 5/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{1 + \frac{5}{x}} = 5$$

4) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ fonksiyonunun, asimptotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremumlarını

ve konkavlık (bükeylik) durumunu inceleyerek grafiğini çiziniz. [25 Puan]

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (f'nin tanım kümesi)}$$

$$x=0 \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow (0,0) \text{ dan geçer}$$

Düsey asimptot yok.

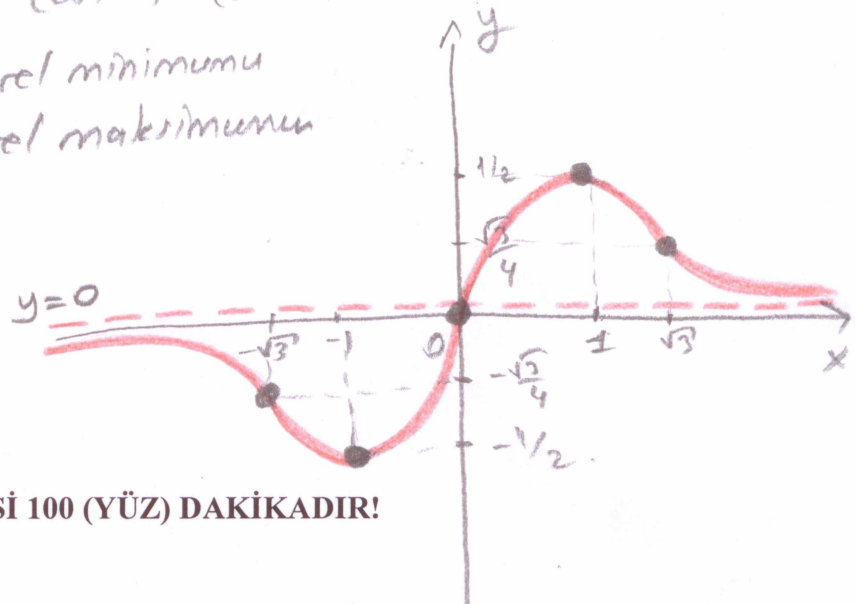
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \Rightarrow y=0 \text{ yatay asimptot.}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ kritik noktalar}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)4x(x^2+1)}{(x^2+1)^4} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{matrix} \text{ (bükeyim nok.)}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	+	+	-	-	-
$f''(x)$	-	+	+	-	-	+	+
$f(x)$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	0
		a. konkav (azalan)	y. konkav (azalan)	y. konkav (artan)	a. konkav (artan)	a. konkav (azalan)	y. konkav (azalan)

$-\frac{1}{2}$, f'nin yerel minimumu
 $\frac{1}{2}$, f'nin yerel maksimumu



SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR!