17 Şubat 2017

1	2	3	4	Toplam

Adı Soyadı:

Öğrenci No:

İmza: Cevap Anahtarı

MAT 311 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
1. ARASINAV SORULARI

1) $A_1 = \{z = x + iy : x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0\}$, $A_2 = \{z = x + iy : |z| > 1\}$ olmak üzere $S = A_1 \cap A_2$ kümesi tanımlanıyor.

(a) S kümesini (z)-düzleminde gösteriniz. **(5 puan)**

(b) $\overset{\circ}{S} = ?$ (S nin içini bulunuz); S kümesi açık mıdır? **(5 puan)**

(c) $\overline{S} = ?$ (S nin kapanışını bulunuz); S kümesi kapalı mıdır? **(5 puan)**

(d) $S' = ?$ (S nin yığılma noktaları kümesini bulunuz). **(5 puan)**

(e) $\partial S = ?$ (S nin sınır noktaları kümesini bulunuz). **(5 puan)**

2) (a) $\omega = f(z) = z^2 + z$ dönüşümü altında $x = 1$ doğrusunun görüntüsünü bulunuz ve bunları karşılık gelen düzlemlerde gösteriniz. **(15 puan)**

(b) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^{1/2}$ ifadesinin tüm değerlerini bulunuz ve esas kökü belirleyiniz. **(10 puan)**

3) $f(z) = x^2 - x + y + i\left(y^2 - 5y - x\right)$ fonksiyonu veriliyor.

(a) f nin türevlenebildiği en geniş kümeyi bulunuz ve burada f nin türevini hesaplayınız. **(15 puan)**

(b) f nin analitik olduğu en geniş kümeyi bulunuz. **(10 puan)**

4) (a) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\overline{z}^2}{z^2}$ limitinin mevcut olup olmadığını araştırınız. **(15 puan)**

(b) $u(x, y) = ax^2 - by^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$ fonksiyonunun tüm kartezyen düzlemde harmonik olması ve $u(2, 1) = 3$ koşulunu sağlaması için a ve b sayıları ne olmalıdır? **(10 puan)**

Not: Sınav süresi 100 dakikadır.

B A Ş A R I L A R !

MAT 311 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİ
1. ARASINAV ÇÖZÜMLERİ

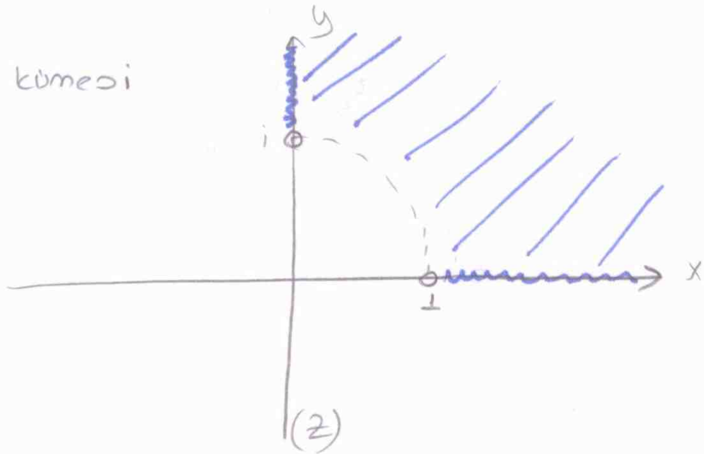
SORU 1:

$A_1 = \{ z = x+iy : x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0 \}$

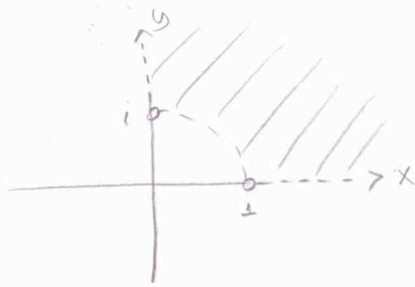
$A_2 = \{ z = x+iy : |z| > 1 \}$

$S = A_1 \cap A_2$

a) S kümesi



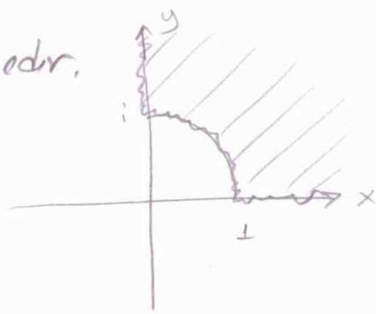
b) $S^\circ = \{ z = x+iy : |z| > 1 \text{ ve } x>1, y>1 \}$



($S^\circ = S$ ise S ye açık küme denir)

Burada S açık küme değildir $S^\circ \neq S$ dir.

c) $\bar{S}$, S'yi kapsayan en küçük kapalı kümedir.



$\bar{S} = \{ z = x+iy : |z| \geq 1 \text{ ve } x \geq 1, y \geq 1 \}$

($\bar{S} = S$ ise S ye kapalı küme denir.)

Burada S kapalı küme değildir $\bar{S} \neq S$ dir.

d) $S' = \bar{S}$ olur. $(\bar{S} = S \cup S')$

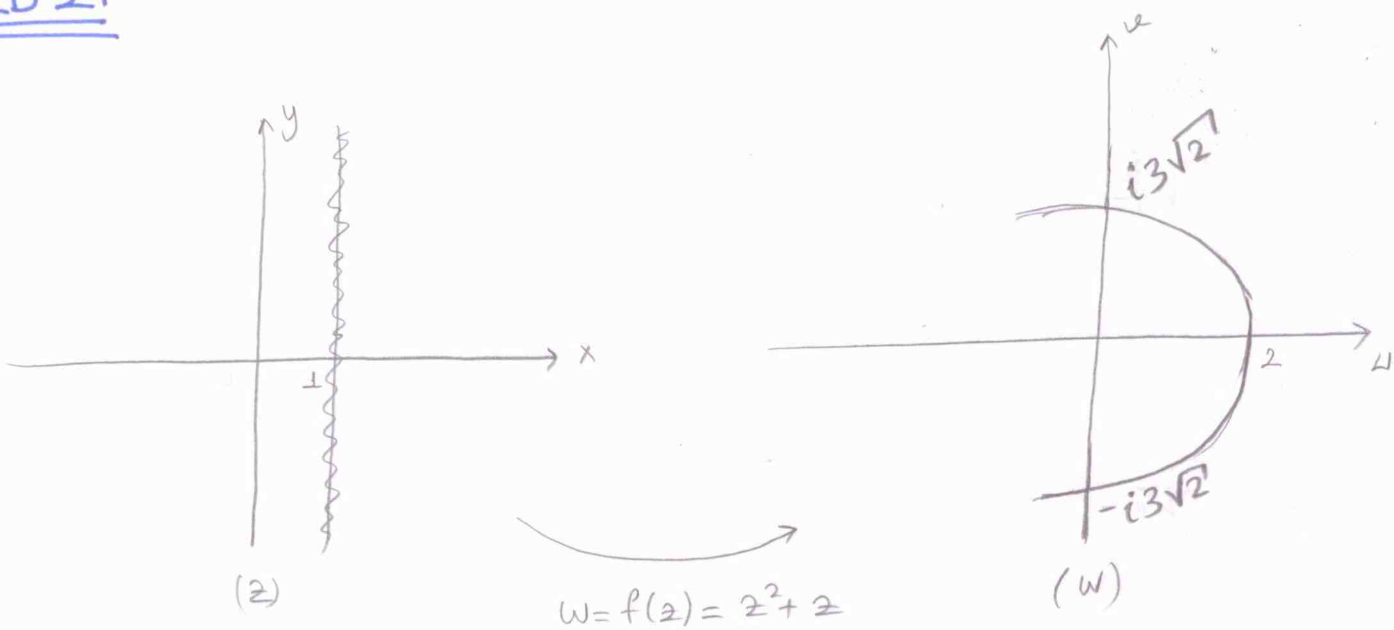
(yığılma noktası; z_0 noktasının her delik komşuluğunda bu noktadan farklı S ye ait en az bir nokta bulunuyorsa bu durumda z_0'a S nin yığılma noktası denir)

e) $\partial S = \{ z = x+iy : x \geq 0 \text{ ve } y \geq 0 \} \cap \{ z = x+iy : |z| = 1 \}$

(Sınır noktası; z_0 noktasının her komşuluğunda hem kümeye ait hem de olmayan en az bir eleman bulunuyorsa bu noktaya kümenin sınır noktası denir.)

SORU 2:

a)



$w = f(z) = z^2 + z$

$z = x + iy$

$z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$

$>$ $w = z^2 + z = (x^2 - y^2 + x) + i(2xy + y)$

$x = 1$ için $u = x^2 - y^2 + x = 2 - y^2$ olur.

$v = 2y + y = 3y$

$y = \frac{v}{3} \Rightarrow \boxed{u = 2 - \frac{v^2}{9}}$ → paraboldür

b) $z = 1 - i\sqrt{3}$

$w = z^{1/2}$

Öncelikle Arg z yi bulalım.

$r = |z| = 2$ $\quad z = 1 - i\sqrt{3}$ θ IV. bölgede

$x = r\cos\theta \Rightarrow 1 = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 1/2$

$y = r\sin\theta \Rightarrow -\sqrt{3} = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = -\sqrt{3}/2$

$\theta_0 = \pi/3$ (θ nın Inci bölgedeki karşılığı) $\Rightarrow \mathrm{Arg}(z) = -\theta_0 = -\pi/3 \in (-\pi, \pi]$ (dördüncü bölge)

$z = re^{i\theta} = 2e^{i(-\pi/3)}$

$w_k = z_k = r^{1/2} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{-\pi/3 + 2k\pi}{2}\right)}$, $k = 0, 1$

$w_0 = \sqrt{2}\, e^{i(-\pi/6)} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$ (esas kök)

$w_1 = \sqrt{2}\, e^{i(-5\pi/6)} = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\sqrt{3} + i)$

SORU 3:

a) $f(z) = x^2 - x + y + i(y^2 - 5y - x)$

$u = x^2 - x + y$ $\quad u_x = 2x - 1$ $\quad u_y = 1$

$v = y^2 - 5y - x$ $\quad v_x = -1$ $\quad v_y = 2y - 5$

$\mathbb{C}$ de sürekli

$u_x = v_y$, $\quad u_y = -v_x$ $\quad\Rightarrow\quad 2x - 1 = 2y - 5$, $\quad 1 = 1$

CRD sadece $y = 2 + x$ doğrusu üzerinde sağlanır.

Bu doğrunun üzerinde türevlenebilir. yani

$f'(z) = u_x + i v_x = 2x - 1 - i$ dir.

b) Fakat $\mathbb{C}$'nin hiçbir noktasında analitik değildir.

Çünkü doğru üstünde alınan bir noktanın en az bir komşuluğundaki her noktada türevlenemez.

SORU 4 :

a) $\lim_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z^2}$

$z = re^{i\theta}$

$\bar{z} = re^{i(-\theta)}$ olup $\lim_{r \to 0} \dfrac{r^2 e^{i(-2\theta)}}{r^2 e^{i(2\theta)}} = e^{i(-4\theta)}$ olup sonuç θ ya bağlı olduğundan limit mevcut değildir.

b) $u(x,y) = ax^2 - by^2$ fonksiyonun tüm kartezyen düzlemde harmonik olması için $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dır.

(ayrıca birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevler tüm düzlemde süreklidir.)

$u_{xx} = 2a$

$u_{yy} = -2b$ $\Big\}$ $\boxed{2a - 2b = 0}$

$u(2,1) = 3 = 4a - b \Rightarrow \boxed{4a - b = 3}$

$\boxed{a = 1}$ ve $\boxed{b = 1}$ olmalıdır.