

Adı ve Soyadı:

10 Aralık 2015

Bölümü:

No:

İmza:

| 1 | 2 | 3 | 4 | Toplam |
|---|---|---|---|--------|
|   |   |   |   |        |

MAT 103 GENEL MATEMATİK I — DÖNEM SONU SINAVI

1) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a)  $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$  [8 Puan]  $1+e^x=u \Rightarrow e^x dx=du$

$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(1+e^x) + C$$

(b)  $\int \ln(3x) dx$  [8 Puan]  $\ln(3x)=u \Rightarrow du = \frac{3}{3x} dx = \frac{dx}{x}$   
 $dx = dv \Rightarrow v=x$

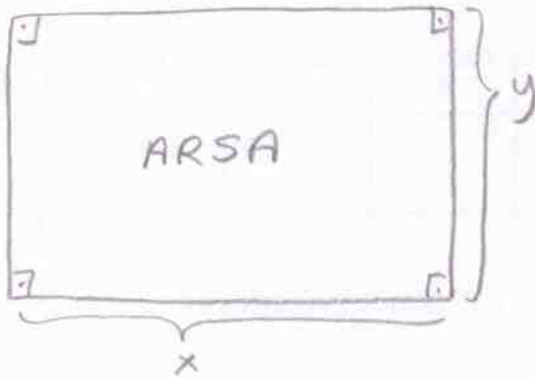
$$I = uv - \int v du = x \ln(3x) - \int x \frac{dx}{x} = x \ln(3x) - x + C$$

(c)  $\int (2x^3 + \cos^2 x) dx$  [9 Puan]  $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$  olduğundan

$$I = 2 \int x^3 dx + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx$$

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

- 2) (a) Çevresi 600 m. olan en büyük alanlı dikdörtgen şeklindeki bir arsanın kenar uzunluklarını bulunuz.  
[12 Puan]



$$2(x+y) = 600 \text{ olduğundan}$$

$$y = 300 - x \text{ dir.}$$

Arsanın alanı ise:

$$A(x) = xy = x(300 - x)$$

(burada  $0 \leq x \leq 300$  olmalıdır)

$$A'(x) = 300 - 2x = 0 \Rightarrow x = 150 \text{ (tek kritik nokta)}$$

$$A(0) = A(300) = 0 \text{ olduğundan maks. alan: } A(150) = 22500$$

halde arsanın kenar uzunlukları  $x = y = 150$  m. dir.

- (b) Küre şeklindeki bir balona dakikada  $20 \text{ m}^3$  ( $20 \text{ m}^3/\text{dak}$ ) hava pompalanmaktadır. Kürenin yarıçapı 3 m. olduğunda yarıçapın değişim oranını bulunuz (Not: Yarıçapı  $r$  olan bir kürenin hacmi  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  dür). [13 Puan]



$$V(t) = \frac{4}{3}\pi (r(t))^3$$

her iki yanın  $t$  ye göre türevini alırsak

$$V'(t) = 4\pi (r(t))^2 r'(t)$$

$$20 = 4\pi (3)^2 r'(t)$$

$$\Rightarrow r'(t) = \frac{5}{9\pi} \text{ m/dak}$$

yani, yarıçap dakikada  $\frac{5}{9\pi}$  m. artmaktadır.

3) (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x - 1}{x} \right)$  limitini araştırınız. [8 Puan]  $\left( \frac{0}{0} \right)$  belirsizliği var

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1 \text{ bulunur.}$$

(b)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1}$  fonksiyonunun reel sayılarda sürekli olup olmadığını araştırınız. [8 Puan]

Rasyonel fonksiyonların (iki polinomun bölümü) tanım kümesiyle sürekli olduğu küme aynıdır. Payda sıfır olamayacağından  $f$  fonksiyonu tüm reel sayılarda tanımlı olup her yerde sürekli dir.

(c)  $f(x) = \sin(x^2 + 1) + e^{x+x^2} - \frac{1}{\ln x}$  ise  $f'(x)$  türevini bulunuz. [9 Puan]

$$f'(x) = 2x \cos(x^2 + 1) + (1+2x)e^{x+x^2} + \frac{1/x}{(\ln x)^2}$$

bulunur.

4) (a)  $f(x) = x - \frac{x^3}{2}$  fonksiyonunun tanım kümesini, asimtotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları, yerel

ekstremlerini ve konkavlık yönünü belirtiniz ve grafiğini çiziniz. [25 Puan]

$$D_f = \mathbb{R} \text{ (f'nin tanım kümesi)}$$

$$\left. \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y=0 \\ y=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2} \end{array} \right\} (0,0), (-\sqrt{2},0), (\sqrt{2},0) \text{ noktalarından geçer}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^3}{2}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^3}{2}\right) = -\infty$$

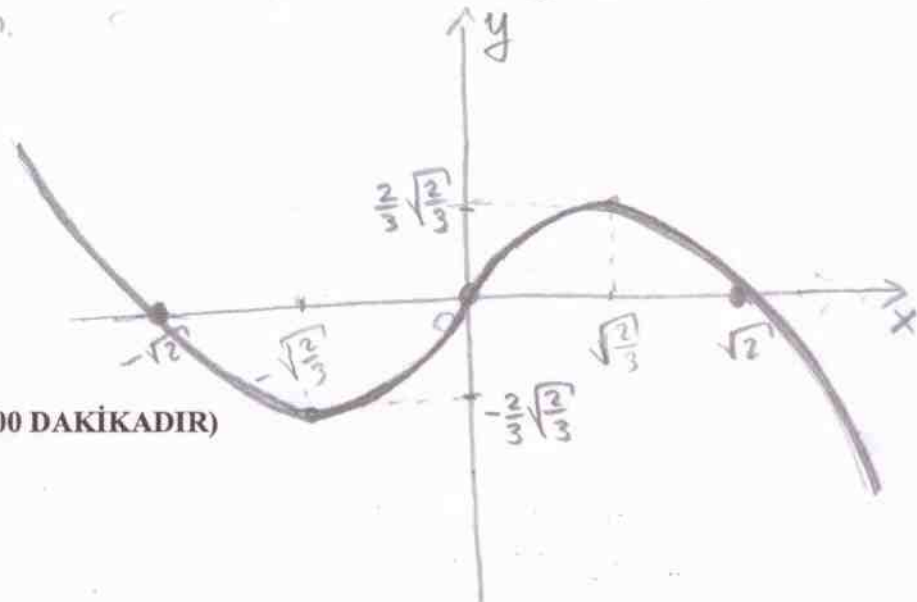
(yatay ve dikey asimtot yoktur)

$$f'(x) = 1 - \frac{3x^2}{2} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \text{ kritik noktalar.}$$

$$f''(x) = -3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (dönüm noktası)}$$

|          |           |                                  |   |                                 |           |   |
|----------|-----------|----------------------------------|---|---------------------------------|-----------|---|
| x        | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{2}{3}}$            | 0 | $\sqrt{\frac{2}{3}}$            | $+\infty$ |   |
| $f'(x)$  | -         | 0                                | + | +                               | 0         | - |
| $f''(x)$ | +         | +                                | 0 | -                               | -         | - |
| $f(x)$   | $+\infty$ | $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ | 0 | $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$ | $-\infty$ |   |

yerel min.      yerel maks.



(SINAV SÜRESİ 100 DAKİKADIR)