

Adı ve Soyadı:

22 Kasım 2013

No:

İmza:

1	2	3	4	Toplam

MAT 103 GENEL MATEMATİK I

2. ARASINAV SORULARI

1) (a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + 1$ fonksiyonunun tüm yerel ekstremumlarını belirleyiniz. [13 Puan]

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x^2 - 3x + 2) = x(x-1)(x-2) = 0$$

$\Rightarrow x=0, x=1, x=2$ kritik noktalar

$f''(x) = 3x^2 - 6x + 2$ olduğundan

$f''(0) = 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ yerel min. nokta olup} \\ f(0) = 1 \text{ yerel minimum değerdir.} \end{cases}$

$f''(1) = -1 < 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ yerel maks. nokta olup} \\ f(1) = \frac{5}{4} \text{ yerel maksimum değerdir.} \end{cases}$

$f''(2) = 2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \text{ yerel min. nokta olup} \\ f(2) = 1 \text{ yerel minimum değerdir.} \end{cases}$

(b) $f(x) = e^{\tan x}$ ise $f'(x) = ?$ [12 Puan]

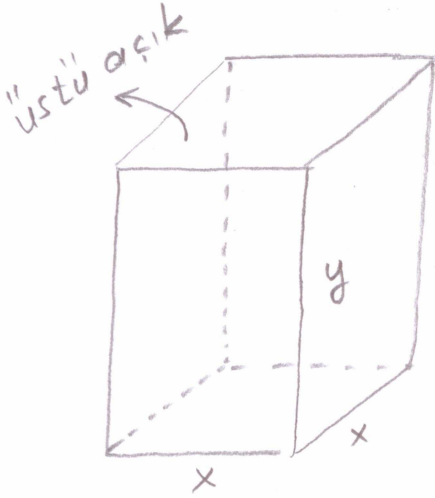
zincir kuralını kullanırsak

$$f'(x) = (1 + \tan^2 x) e^{\tan x} = \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

olarak bulunur,

2) (a) 32 cm^3 hacme sahip, kare tabanlı ve üstü açık dikdörtgenel bir kutu yapılmak isteniyor.

En az malzemenin kullanılması için kutunun boyutları kaç cm olmalıdır? [13 Puan]



$$\text{Kutunun hacmi} = 32 = x^2 y \Rightarrow y = \frac{32}{x^2}$$

$$\text{Kullanılan malzeme} = x^2 + 4xy =$$

$$\text{İse } f(x) = x^2 + \frac{128}{x} \quad (x > 0) \text{ olur,}$$

$$\text{Buna göre } f'(x) = 2x - \frac{128}{x^2} = 2 \left(\frac{x^3 - 64}{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ tek kritik noktadır.}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{256}{x^3} \text{ olup } f''(4) = 6 > 0$$

olduğundan $x = 4$ iken minimum değer alır.
Yani kutunun boyutları $x = 4 \text{ cm}$, $y = 2 \text{ cm}$ seçilmelidir.

(b) Küresel bir balona saniyede 20 cm^3 hızla hava pompalanmaktadır. Balonun yarıçapı 5 cm

olduğu anda yarıçaptaki değişim hızı kaçtır? (Not: r yarıçaplı bir kürenin hacminin $V = \frac{4}{3} \pi r^3$

olduğu bilinmektedir.) [12 Puan]

Hacim zamana göre artarken yarıçap da zamana göre artacaktır. Buna göre

$$V = V(t) \text{ ve } r = r(t) \text{ olup}$$

$$V(t) = \frac{4}{3} \pi (r(t))^3$$

$$\Rightarrow V'(t) = 4\pi (r(t))^2 \cdot r'(t)$$

$$V'(t) = 20, \quad r(t) = 5 \text{ olduğu anda}$$

$$r'(t) = \frac{20}{4\pi \cdot 25} = \frac{1}{5\pi} \text{ cm/sn} \quad \left(\begin{array}{l} \text{yarıçaptaki} \\ \text{değişim hızı} \end{array} \right)$$

3) Aşağıdaki limitleri araştırınız.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x}$ [13 Puan]

limitte $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. L'Hôpital kuralını kullanırsak

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2) = 2$$

bulunur.

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x} + x}$ [12 Puan]

limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{2x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2e^{2x} + 1}$$

(tekrar $\frac{\infty}{\infty}$)

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{4e^{2x}} = 0$$

elde edilir.

4) (a) $f(x) = \frac{4x+1}{x}$ fonksiyonunun, asimtotlarını, artan-azalan olduğu aralıkları, yerel ekstremumlarını ve konkavlık (bükeylik) durumunu inceleyerek grafiğini çiziniz. [25 Puan]

$$y = f(x) = \frac{4x+1}{x} = 4 + \frac{1}{x} \quad \begin{array}{l} x=0 \Rightarrow y \text{ yok!} \\ y=0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{array}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (f \text{ nin tanım kümesi})$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 + \frac{1}{x}) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (4 + \frac{1}{x}) = -\infty \end{array} \right\} x=0 \text{ dikey asimptot}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (4 + \frac{1}{x}) = 4 \Rightarrow y=4 \text{ yatay asimptot.}$$

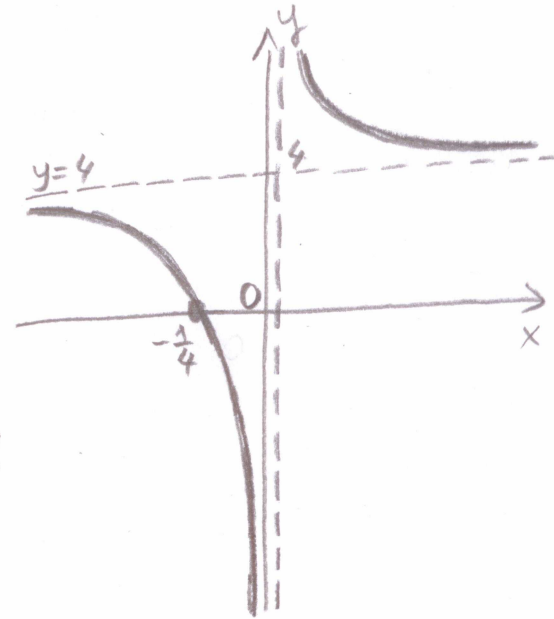
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (x \neq 0 \text{ o.ü}) \quad (f \text{ hep azalan})$$

yerel ekstremum yok.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \quad \begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow f \text{ asâğı bükey (çünkü } f''(x) < 0) \\ x > 0 \Rightarrow f \text{ yukarı bükey (çünkü } f''(x) > 0) \end{array}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—	—
$f''(x)$	—	—	+	+
$f(x)$	4	0	$-\infty$	$+\infty$

\swarrow asâğı bükey \swarrow asâğı bükey \swarrow yukarı bükey



SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR!