

Adı ve Soyadı:

No:

İmza:

Cevap
Analizi

				Toplam
1				
2				
3				
4				
SINAV NOTU:				

MAT 103 GENEL MATEMATİK I --- DÖNEM SONU SINAVI (18 Aralık 2010)

1) Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int_1^3 \left(x^2 + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$ (8 P)

$$\begin{aligned} I &= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} x^{3/2} + \ln|x| \right) \Big|_1^3 \\ &= (9 + 2\sqrt{3} + \ln 3) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 \right) \\ &= \boxed{8 + 2\sqrt{3} + \ln 3} \end{aligned}$$

(b) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ (8 P)

$$\sin x = u \Rightarrow \cos x dx = du$$

$$\Rightarrow I = \int e^u du = e^u + C = \boxed{e^{\sin x} + C}$$

(c) $\int x e^x dx$ (9 P)

$$x = u \Rightarrow dx = du$$

$$e^x dx = dv \Rightarrow e^x = v$$

$$I = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = \boxed{x e^x - e^x + C}$$

- 2) (a) P TL olan para yıllık %10 bileşik faiz ile bankaya yatırıldığında kaç yıl sonra 5 katına ulaşır? (12 P)

$$A = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} \quad \text{formülünde}$$

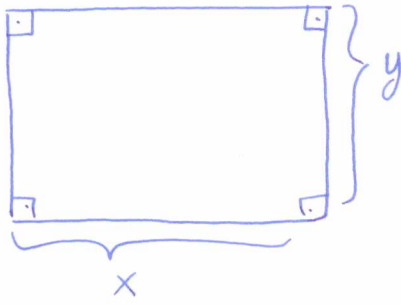
$$A = 5P, \quad r = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} \quad \text{ve } m = 1 \text{ alırsak}$$

$$5P = P \left(1 + \frac{1}{10}\right)^t \Rightarrow 5 = \left(\frac{11}{10}\right)^t$$

$$\Rightarrow \ln 5 = t \ln \left(\frac{11}{10}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{\ln 5}{\ln(11/10)} \quad \text{bulunur.}$$

- (b) Çevresi 16 metre olan bir dikdörtgenin alanının maksimum olabilmesi için kenarları kaç metre olmalıdır? (13 P)



$$\text{Çevre} = 2(x+y) = 16 \Rightarrow x+y = 8 \text{ olur.}$$

$$\text{Alan} = xy = x(8-x) = 8x - x^2 = f(x)$$

olup burada $0 \leq x \leq 8$ olmalıdır.

$$f'(x) = 8 - 2x = 0 \Rightarrow x = 4 \in [0, 8] \\ \text{(kritik nokta)}$$

$$\Rightarrow A(4) = 16$$

$$A(0) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} A(8) = 0 \end{array} \right\} \text{uç noktalar}$$

Sonuç olarak, maksimum alan 16 olduğundan

$x = y = 4$ olmalıdır (yani şekil aslında bir karedir)

3) (a) $f(x) = x^x$ fonksiyonunun türevini hesaplayınız. (12 P)

$$\begin{aligned} y = x^x &\Rightarrow \ln y = x \ln x \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1 \quad (x > 0) \\ &\Rightarrow y' = y (\ln x + 1) \\ &\Rightarrow \boxed{y' = x^x (\ln x + 1)} \end{aligned}$$

(b) $f(x) = 4x - x^2$ fonksiyonunun değişim tablosunu yaparak grafiğini çiziniz. (13 P)

$D_f = \mathbb{R}$ (tanım kümesi)
 $x=0 \Rightarrow y=0$
 $y=0 \Rightarrow x=0, x=4$ } $(0,0)$ ve $(4,0)$ noktalarından geçer.

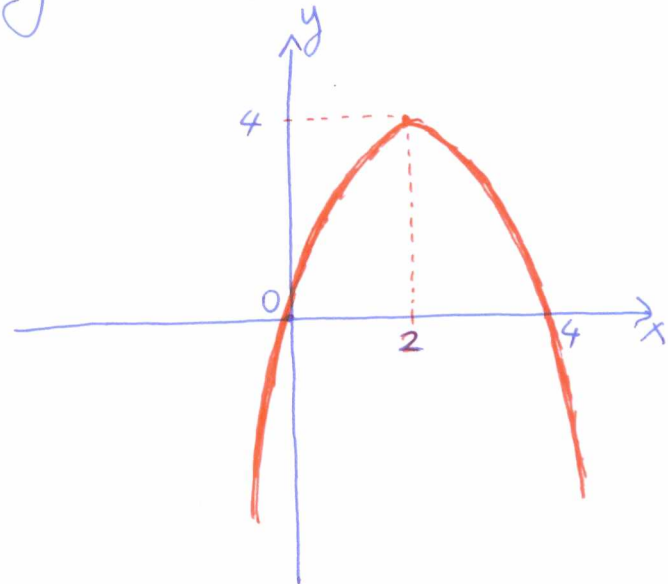
Düsey asimptotu yoktur.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x - x^2) = -\infty$ olduğundan yatay asimptot da yoktur.

$$y' = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ kritik nokta}$$

$$y'' = -2 < 0 \text{ (grafik hep aşağı konkav)}$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y'	+	+	0	-	-
y''	-	-	-	-	-
y	↗	↗	↘	↘	↘



4) (a) $f(x) = \sqrt{|4-x|} + \ln(1-x^2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz. (13 P)

$|4-x| \geq 0$ olduğundan karekök fonksiyonu her zaman tanımlıdır, fakat logaritma fonksiyonunun tanımlı olabilmesi için $1-x^2 > 0$ olmalıdır.

O halde $x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$

$$\Rightarrow D_f = (-1, 1) \quad (\text{tanım kümesi})$$

(b) $f(x) = |x| + x^2$ fonksiyonunun $x_0 = 0$ noktasında türevinin mevcut olup olmadığını araştırınız. (12 P)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1 + x) = -1$$

olup sonuçlar farklı çıktığından f fonksiyonu

$x_0 = 0$ da türevlenemez.

SINAV SÜRESİ 100 (YÜZ) DAKİKADIR!